

4.1

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että nopanheitolla saadaan silmäluku yksi on $\frac{1}{6}$.

- a) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kaksi ykköstä.

$P(\text{täsmälleen kaksi ykköstä})$

$$= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$n = 5, r = 2, p = \frac{1}{6}$$

$$\approx 0,161$$

- b) Lasketaan todennäköisyys, että viidellä nopanheitolla saadaan täsmälleen kolme ykköstä.

$P(\text{täsmälleen kolme ykköstä})$

$$= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\approx 0,0322$$

Vastaus

- a) 0,161 b) 0,0322

4.2

Hedelmien pakkaaminen 18 kappaleen myyntipakkauksiin voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa on 18 toistoa. Todennäköisyys, että yksittäinen hedelmä on pilaantunut, on $3\% = 0,03$.

- a) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päättyy täsmälleen yksi pilaantunut hedelmä.

$P(\text{täsmälleen yksi pilaantunut})$

$$= \binom{18}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^{17} \\ \approx 0,32$$

- b) Lasketaan todennäköisyys, että 18 kappaleen pakkaukseen päättyy täsmälleen kaksi pilaantunutta hedelmää.

$P(\text{täsmälleen kaksi pilaantunutta})$

$$= \binom{18}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{16} \\ \approx 0,085$$

Vastaus

- a) 0,32 b) 0,085

4.3

Oletetaan, että tavaraerä on iso. Tällöin todennäköisyys, että tavaraerästä satunnaisesti valittu yksilö on virheellinen, on $2\% = 0,02$.

Todennäköisyys, että valittu yksilö on virheetön on $0,98$.

- a) Lasketaan todennäköisyys, että 20 kappaleen näytteessä on enintään kaksi virheellistä yksilöä.

$$\begin{aligned} &P(\text{enintään 2 virheellistä}) \\ &= P(0 \text{ virheellistä tai 1 virheellinen tai 2 virheellistä}) \\ &= P(0 \text{ virheellistä}) + P(1 \text{ virheellinen}) + P(2 \text{ virheellistä}) \\ &= \underbrace{\binom{20}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{20}}_{0 \text{ virheellistä}} + \underbrace{\binom{20}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{19}}_{1 \text{ virheellinen}} + \underbrace{\binom{20}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{18}}_{2 \text{ virheellistä}} \\ &\approx 0,99 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuma "ainakin 2 virheellistä" on sama kuin "2, 3, ... 19 tai 20 virheellistä".

Vastatapahtuman "0 tai 1 virheellistä" todennäköisyys on helpompi laskea. Lasketaan, millä todennäköisyydellä 20 kappaleen näytteessä on ainakin kaksi virheellistä yksilöä.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin 2 virheellistä}) \\ &= 1 - P(0 \text{ tai 1 virheellistä}) \\ &= 1 - (P(0 \text{ virheellistä}) + P(1 \text{ virheellinen})) \\ &= 1 - \left(\underbrace{\binom{20}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{20}}_{0 \text{ virheellistä}} + \underbrace{\binom{20}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{19}}_{1 \text{ virheellinen}} \right) \\ &\approx 0,060 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,99 b) 0,060

4.4

Todennäköisyys, että yksittäinen koira on valkoruskea, on $72\% = 0,72$.

a) Lasketaan todennäköisyys, että 23 koirasta tasan 20 on valkoruskeita.

$$\begin{aligned} &P(20 \text{ valkoruskeaa}) \\ &= \binom{23}{20} \cdot 0,72^{20} \cdot 0,28^3 \qquad 1 - 0,72 = 0,28 \\ &\approx 0,054 \end{aligned}$$

b) Tapahtuman ”enintään 20 koirista on valkoruskeita” vastatapahtuma on ”21, 22 tai 23 koiraa on valkoruskeita”.

Lasketaan todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{enintään } 20 \text{ valkoruskeaa}) \\ &= 1 - P(21 \text{ tai } 22 \text{ tai } 23 \text{ valkoruskeaa}) \\ &= 1 - (P(21) + P(22) + P(23)) \\ &= 1 - \left(\binom{23}{21} \cdot 0,72^{21} \cdot 0,28^2 + \binom{23}{22} \cdot 0,72^{22} \cdot 0,28^1 + \binom{23}{23} \cdot 0,72^{23} \cdot 0,28^0 \right) \\ &\approx 0,97 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,054 **b)** 0,97

4.5

Vakioveikkaus voidaan ajatella toistokokeena, jossa on 13 toistoa. Yksittäisessä ottelussa onnistumisen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

a) Pelaaja saa kaikki 13 peliä oikein todennäköisyydellä

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{13 \text{ kpl}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}.$$

Todennäköisyyden voi laskea myös toistokokeen kaavalla:

$$\underbrace{\binom{13}{13}}_{=1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^0}_{=1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{13}.$$

b) Toistokokeen kaavan mukaan todennäköisyys on

$$\begin{aligned} & \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{13-12} \\ &= \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c) Tapahtuman "vähemmän kuin 12 oikein" vastatapahtuma on "12 tai 13 oikein."

$$\begin{aligned} & P(\text{vähemmän kuin 12 oikein}) \\ &= 1 - P(12 \text{ tai } 13 \text{ oikein}) \\ &= 1 - \left[\binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \right] \end{aligned}$$

4.6

- a) Lentokoneessa on 138 paikkaa ja lennolle on myyty 141 matkalippua. Lentomatkan varannut matkustaja saapuu lennolle todennäköisyydellä $95\% = 0,95$ ja ei saavu lennolle todennäköisyydellä $5\% = 0,05$.

Jos tasan yksi matkustaja ei mahdu koneeseen, niin lennolle saapuu 141 matkalipun ostaneesta tasan 139.

$$\begin{aligned} &P(\text{yksi ei mahdu koneeseen}) \\ &= P(139 \text{ matkustajaa}) \\ &= \binom{141}{139} \cdot 0,95^{139} \cdot 0,05^2 \\ &\approx 0,020 \end{aligned}$$

- b) Jos kaikki matkustajat mahtuvat koneeseen, matkustajia saapuu lennolle korkeintaan 138. Tapahtuman ”korkeintaan 138 matkustajaa saapuu lennolle” vastatapahtuma on ”lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa”.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikki mahtuvat koneeseen}) \\ &= P(\text{lennolle saapuu korkeintaan 138 matkustajaa}) \\ &= 1 - P(\text{lennolle saapuu 139, 140 tai 141 matkustajaa}) \\ &= 1 - \left(\binom{141}{139} \cdot 0,95^{139} \cdot 0,05^2 + \binom{141}{140} \cdot 0,95^{140} \cdot 0,05^1 \right. \\ &\quad \left. + \binom{141}{141} \cdot 0,95^{141} \cdot 0,05^0 \right) \\ &\approx 0,97 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,020 b) 0,97

4.7

Pelajan päättyessä joukkue A johtaa ottelua yhdellä pisteellä. Jotta joukkue B voittaisi ottelun, on sen saatava vapaaheitoista vähintään 2 pistettä. Siis joukkueen B on saatava kolmesta vapaaheitosta 2 tai 3 pistettä.

Yksittäinen vapaaheitto onnistuu todennäköisyydellä $75\% = 0,75$, ja epäonnistuu todennäköisyydellä $25\% = 0,25$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(2 \text{ tai } 3 \text{ koria}) \\ &= P(2 \text{ koria}) + P(3 \text{ koria}) \\ &= \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 + \binom{3}{3} \cdot 0,75^3 \cdot 0,25^0 \\ &\approx 0,84 \end{aligned}$$

Joukkue B voittaa todennäköisyydellä 84 %.

Vastaus

84 %

4.8

Ennätyslämpimien heinäkuiden esiintyminen voidaan ajatella toistokokeeksi, jossa yksittäinen kesä on ennätyslämmin todennäköisyydellä $\frac{1}{60}$. Heinäkuu ei ole ennätyslämmin todennäköisyydellä $\frac{59}{60}$.

Lasketaan todennäköisyys, että seuraavien 30 vuoden aikana ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta.

$P(0 \text{ ennätyslämmintä})$

$$= \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^0 \cdot \left(\frac{59}{60}\right)^{30}$$

$$\approx 0,604$$

Tapahtuman "vähintään 2 ennätyslämmintä" vastatapahtuma on "0 tai 1 ennätyslämmin. Lasketaan todennäköisyys, että seuraavien 30 vuoden aikana on vähintään 2 ennätyslämmintä heinäkuuta.

$P(\text{vähintään } 2 \text{ ennätyslämmintä})$

$$= 1 - P(0 \text{ tai } 1 \text{ ennätyslämmintä})$$

$$= 1 - \left(\binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^0 \cdot \left(\frac{59}{60}\right)^{30} + \binom{30}{1} \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^1 \cdot \left(\frac{59}{60}\right)^{29} \right)$$

$$\approx 0,0889$$

Vastaus

ei yhtään 0,604; vähintään kaksi 0,0889

4.9

Laatikossa on 20 punaista ja 15 keltaista palloa. Laatikosta nostetaan 8 palloa ja pallot palautetaan aina nostojen välissä takaisin laatikkoon.

Punaisen pallon saamisen todennäköisyys on $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$. Kyseessä on toistokoe, jossa on 8 toistoa.

Tapahtuma ”saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja” on sama kuin tapahtuma ”saadaan 5, 6, 7 tai 8 punaista palloa.

$P(\text{saadaan enemmän punaisia kuin keltaisia palloja})$

$= P(5, 6, 7 \text{ tai } 8 \text{ punaista palloa})$

$= P(5) + P(6) + P(7) + P(8)$

$$\begin{aligned} &= \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \\ &\quad + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^1 + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0 \end{aligned}$$

$\approx 0,527$

Vastaus

0,527

4.10

- a) Koska arpojen määrä on suuri, voidaan olettaa, että yksittäisen arvan voittotodennäköisyys on $\frac{1}{4} = 0,25$. (Kyseessä on siis toistokoe.)

Todennäköisyys, että arpa ei voita on $\frac{3}{4} = 0,75$.

Lasketaan todennäköisyys, että viidestä ostetusta arvasta täsmälleen kaksi voittaa.

$P(\text{täsmälleen kaksi voittaa})$

$$= \binom{5}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^3 \\ \approx 0,264$$

- b) Arpoja on jäljellä 16. Koska arpojen määrä on pieni, kyseessä ei ole toistokoe.

16 arvasta voidaan ostaa 5 arpaa $\binom{16}{5} = 4368$ tavalla.

Neljästä voittoarvasta voidaan ostaa 2 arpaa $\binom{4}{2} = 6$ tavalla ja

lopun 3 arpaa voidaan ostaa 12 tyhjää arvasta $\binom{12}{3} = 220$ tavalla.

Kaksi voittoarpaa ja kolme tyhjää arpaa voidaan ostaa $6 \cdot 220 = 1320$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(\text{täsmälleen kaksi voittoa})$

$$= \frac{1320}{4368}$$

$$\approx 0,302$$

Tapahtumalle suotuisten alkeistapausten lukumäärä
jaetaan kaikkien alkeistapausten lukumäärällä.

Vastaus

a) 0,264 **b)** 0,302

4.11

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että 8-sivuisella nopalla saadaan silmäluku seitsemän, on $\frac{1}{8}$. Todennäköisyys, että silmäluku ei ole seitsemän, on $\frac{7}{8}$.

Lasketaan todennäköisyys, että kymmenellä nopan heitolla puolet heitoista antaa silmäluvun 7 eli saadaan täsmälleen viisi seiskaa.

$P(\text{täsmälleen viisi seiskaa})$

$$= \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^5$$
$$\approx 0,00394$$

Vastaus

0,003 94

4.12

Tavallisen kuusisivuisen nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi.

Todennäköisyys, että saadaan silmäluku yksi, on $\frac{1}{6}$.

Tapahtuman "vähintään 5 ykköstä" vastatapahtuma on "0, 1, 2, 3 tai 4 ykköstä". Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{vähintään } 5 \text{ ykköstä})$

$$= 1 - P(0 \text{ tai } 1 \text{ tai } 2 \text{ tai } 3 \text{ tai } 4 \text{ ykköstä})$$

$$= 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4))$$

$$= 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \right. \\ \left. + \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} + \binom{20}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \right]$$

$$\approx 0,231$$

Vastaus

0,003 94

4.13

Janin laskussa toinen todennäköisyyden laskulauseke on ylimääräinen. Jos heitettäessä kolikkoa 12 kertaa saadaan neljä kruunaa, niin silloin loput kahdeksan on klaavoja.

Lasketaan siis todennäköisyys, että 12 rahanheitolla saadaan täsmälleen 4 kruunaa.

$$P = \binom{12}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^8 \approx 0,12 .$$

Huomaa, että Janin laskema todennäköisyys oli kaksinkertainen.

4.14

Todennäköisyys, että mies on punavihersokea on $8\% = 0,08$, joten mies ei ole punavihersokea todennäköisyydellä $1 - 0,08 = 0,92$.

Todennäköisyys, että nainen on punavihersokea on $0,4\% = 0,004$, joten nainen ei ole punavihersokea todennäköisyydellä $1 - 0,004 = 0,996$.

Kurssin opiskelijoista 19 on tyttöjä ja 15 poikia. Kurssilla on yhteensä 34 opiskelijaa.

Tapahtuman ”ainakin kaksi opiskelijaa on punavihersokeita” vastatapahtuma on ”0 tai 1 on punavihersokeita”.

$$P(\text{ainakin 2})$$

$$= 1 - P(0 \text{ tai } 1)$$

$$= 1 - (P(0 \text{ p ja } 0 \text{ t}) + P(1 \text{ p ja } 0 \text{ t}) + P(0 \text{ p ja } 1 \text{ t}))$$

$$= 1 - (\underbrace{0,92^{15} \cdot 0,996^{19}}_{0 \text{ poikaa ja } 0 \text{ tyttöä}} + \underbrace{\binom{15}{1} \cdot 0,08 \cdot 0,92^{14} \cdot 0,996^{19}}_{1 \text{ poika ja } 0 \text{ tyttöä}})$$

$$+ \underbrace{0,92^{15} \cdot \binom{19}{1} \cdot 0,004 \cdot 0,996^{18}}_{0 \text{ poikaa ja } 1 \text{ tyttö}}$$

$$\approx 0,37$$

Vastaus

0,37

4.15

1. Yksittäisen monivalintatehtävän vastaus on oikein

todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0,25$ ja väärin todennäköisyydellä

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Selvitetään, kuinka monella oikealla vastauksella kokeen yhteispistemäärä on nolla.

Jos oikeita vastauksia on 0, yhteispistemäärä on -10 pistettä. Koska pistemäärä on negatiivinen, kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Jos oikeita vastauksia on 1, yhteispistemäärä on $1 \cdot 3 - 9 \cdot 1 = -6$. Koska pistemäärä on negatiivinen, kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Jos oikeita vastauksia on 2, yhteispistemäärä on $2 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = -2$. Koska pistemäärä on negatiivinen, kokeen pistemääräksi tulee nolla.

Jos oikeita vastauksia on 3, yhteispistemäärä on $3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 2$.

Opiskelija saa siis nolla pistettä, jos oikeita vastauksia on 0, 1 tai 2.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(0 \text{ tai } 1 \text{ tai } 2 \text{ oikeaa})$

$$= P(0) + P(1) + P(2)$$

$$= \underbrace{\binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10}}_{0 \text{ oikeaa ja } 10 \text{ väärää} + \underbrace{\binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9}_{1 \text{ oikeaa ja } 9 \text{ väärää} + \underbrace{\binom{10}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^8}_{2 \text{ oikeaa ja } 8 \text{ väärää}}$$

$$\approx 0,526$$

2. Yksittäisen monivalintatehtävän vastaus on oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$ ja väärin todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$.

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki 10 tehtävää ovat oikein.

$$P(10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 0,000\,0169$$

Vastaus

1. 0,526

2. 0,000 0169

4.16

Tapahtuman ”toinen kuutonen tulee ennen 10. heittoa” vastatapahtuma on ”9:llä ensimmäisellä heitolla tulee 0 tai 1 kuutosta”.

Tapahtuma on siis toistokoe, jossa on 9 toistoa. Kuutosen todennäköisyys yksittäisessä heitossa on $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} &P(\text{kuutonen tulee ennen 10. heittoa}) \\ &= 1 - P(9 \text{ heitolla saadaan 0 tai 1 kuutosta}) \\ &= 1 - (P(0 \text{ kuutosta}) + P(1 \text{ kuutonen})) \\ &= 1 - \left(\binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \right) \\ &\approx 0,457 \end{aligned}$$

Vastaus

0,457

4.17

Paras tulos ennen Mirvan ja Virven joukkuetta on 4 kymppiä. Mirvan ja Virven on voittaakseen heitettävä 5 tai 6 kymppiä.

Mirva osuu kymppiin todennäköisyydellä 0,75 ja Virve todennäköisyydellä 0,35.

Lasketaan todennäköisyydet.

$$\begin{aligned} &P(6 \text{ kymppiä}) \\ &= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä ja Virve saa 3 kymppiä}) \\ &= P(\text{Mirva saa 3 kymppiä}) \cdot P(\text{Virve saa 3 kymppiä}) \\ &= 0,75^3 \cdot 0,35^3 \\ &\approx 0,018088 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(5 \text{ kymppiä}) \\ &= P(\text{Mirva saa 3 ja Virve 2 TAI Mirva saa 2 ja Virve 3 kymppiä}) \\ &= P(\text{Mirva 3 ja Virve 2}) + P(\text{Mirva 2 ja Virve 3}) \\ &= P(\text{Mirva 3}) \cdot P(\text{Virve 2}) + P(\text{Mirva 2}) \cdot P(\text{Virve 3}) \\ &= \underbrace{0,75^3}_{\text{Mirvalla kaikki kymppejä}} \cdot \underbrace{\binom{3}{2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^1}_{\text{Virvellä 2 kymppiä}} + \underbrace{\binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^1}_{\text{Mirvalla 2 kymppiä}} \cdot \underbrace{0,35^3}_{\text{Virvellä kaikki kymppejä}} \\ &\approx 0,11886 \end{aligned}$$

Lasketaan voiton todennäköisyys.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Mirva ja Virve voittavat}) &= P(6 \text{ kymppiä tai } 5 \text{ kymppiä}) \\
 &= P(6 \text{ kymppiä}) + P(5 \text{ kymppiä}) \\
 &\approx 0,018088... + 0,11886 \\
 &= 0,136948 \\
 &\approx 0,14
 \end{aligned}$$

Vastaus

0,14

4.18

- a) Todennäköisyys, että satunnainen kaupungin asukas vastustaa rakentamista, on $\frac{1}{5} = 0,2$.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla $0,2 \cdot 10 = 2$ vastustajaa. Koska kaupunki on suuri, otoksen muodostaminen voidaan ajatella toistokokeeksi.

$P(10$ hengestä täsmälleen kaksi vastustaa rakentamista)

$$= \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 \\ \approx 0,302$$

- b) Lukion 40 opettajasta joka viides eli $\frac{1}{5} \cdot 40 = 8$ opettajaa vastustaa rakentamista.

Jos vastustajien osuus otoksessa olisi sama, tulisi 10 hengen otoksessa olla 2 vastustajaa.

Kyseessä ei ole toistokoe. Selvitetään kuinka monella tavalla 10 hengen otos voidaan valita ja kuinka monella tavalla valinta voidaan tehdä niin, että siinä on 8 vastustajaa ja 2 kannattajaa.

Opettajista voidaan valita 10 hengen otos $\binom{40}{10}$ tavalla.

8 vastustajan joukosta voidaan valita kaksi vastustajaa $\binom{8}{2}$ tavalla ja

32 kannattajan joukosta voidaan valita 8 kannattajaa $\binom{32}{8}$ tavalla.

Siis 2 vastustajaa ja 8 kannattajaa voidaan valita $\binom{8}{2} \cdot \binom{32}{8}$ tavalla.

Lasketaan todennäköisyys.

$P(10 \text{ valitusta opettajasta } 2 \text{ vastustaa rakentamista})$

$$= \frac{\binom{8}{2} \binom{32}{8}}{\binom{40}{10}}$$

$$\approx 0,347$$

Vastaus

a) 0,302 **b)** 0,347

4.19

Ava ja Severi pelaavat kuukauden aikana tennistä n peliä. Ava voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä 0,40.

Muodostetaan lauseke todennäköisyydelle, että Ava voittaa täsmälleen 2 peliä.

$P(\text{Ava voittaa täsmälleen kaksi peliä})$

$$= \binom{n}{2} \cdot 0,40^2 \cdot 0,60^{n-2} \quad \text{Sievennetään CAS-laskimen avulla.}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \begin{array}{l} \text{Laskin saattaa antaa lausekkeen eri muodossa.} \\ \text{Käytetään laskimen antamaa muotoa.} \end{array}$$

Yhtälö $P = 0,121$ voidaan ratkaista kokeilemalla esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla. Kirjoitetaan sarakkeeseen A pelien lukumäärät $n = 1, 2, 3, \dots$. Lasketaan sarakkeeseen B tapahtuman "täsmälleen 2 voittoa" todennäköisyys.

	A	B
1	n	P
2	1	0
3	2	0,160
4	3	0,288
5	4	0,3456
...	...	
10	9	0,161
11	10	0,121
12	11	0,089

Ava ja Severi pelaavat 10 peliä.

Vastaus 10 peliä

4.20

Olkoon tapahtuman A todennäköisyys yksittäisessä toistossa p .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$P(3 \text{ toistossa kerran}) = 0,27$$

$$\binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^2 = 0,27 \quad \binom{3}{1} = 3$$

$$3 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 0,27 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$p \approx 0,115 \quad \text{tai} \quad p \approx 0,619 \quad \text{tai} \quad p \approx 1,27$$

Koska todennäköisyys $0 \leq p \leq 1$, niin $p \approx 0,115$ tai $p \approx 0,619$.

Vastaus

0,115 tai 0,619

4.21

HPV voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä $60\% = 0,60$.

Koska voittoon tarvitaan neljän ottelun voitto, pelataan loppuotteluissa korkeintaan seitsemän ottelua. HPV voittaa mestaruuden seuraavissa tapauksissa:

- 1) Pelataan 4 ottelua: HPV voittaa kaikki 4.
- 2) Pelataan 5 ottelua: HPV voittaa neljästä ensimmäisestä kolme ja viidennen ottelun.
- 3) Pelataan 6 ottelua: HPV voittaa viidestä ensimmäisestä kolme ja kuudennen ottelun.
- 4) Pelataan 7 ottelua: HPV voittaa kuudesta ensimmäisestä kolme ja seitsemännen ottelun.

Lasketaan tapahtumien todennäköisyydet.

1) $P(\text{HPV 4 ekaa}) = 0,60^4 = 0,1296$

2) $P(\text{HPV 3, PPS 1, HPV})$
$$= \underbrace{\binom{4}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^1 \cdot 0,60}_{\substack{\text{HPV voittaa 3,} \\ \text{PPS voittaa 1}}} = 0,20736$$

3) $P(\text{HPV 3, PPS 2, HPV})$
$$= \underbrace{\binom{5}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^2 \cdot 0,60}_{\substack{\text{HPV voittaa 3,} \\ \text{PPS voittaa 2}}} = 0,20736$$

$$4) P(\text{HPV}3, \text{PPS } 3, \text{HPV})$$

$$= \underbrace{\binom{6}{3} \cdot 0,60^3 \cdot 0,40^3 \cdot 0,60}_{\substack{\text{HPV voittaa 3} \\ \text{PPS voittaa 3}}} = 0,165888$$

Lasketaan todennäköisyys, että HPV voittaa mestaruuden.

$$P(\text{HPV voittaa mestaruuden})$$

$$= 0,1296 + 0,20736 + 0,20736 + 0,165888$$

$$\approx 0,71$$

Vastaus

0,71